# EJERCICIOS de REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES 2º BACH.

## INTERVALOS DE CRECIMIENTO. M Y m:

**1.** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Aplicar para ello, alternativamente, los dos métodos conocidos: mediante f' y mediante f''. Intentar hacer un esbozo de su gráfica (si se puede).

**a)** $f(x)=x^4-2x^2$

**b)** $f(x)=x^3-3x^2+1$

**c)** $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

**d)** $f(x)=\left(x^3-4x^2+7x-6\right)e^x$

**e)** $f(x)=\ln x$

**f)** $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

**g)** $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

**h)** $f(x)=x^4-4x^3+1$

**i)** $f(x)=e^{3x}-2e^{2x}+e^x-2$

**j)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

**k)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

**l)** $f(x)=\dfrac{1}{x^4+3}$

**m)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$

**n)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$

**o)** $f(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}$

**p)** $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

**q)** $y=2x^3-9x^2$

**r)** $f(x)=x^3-6x^2+9x$

**s)** $y=x^3-12x$

**t)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

**u)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

**v)** $y=\dfrac{x^2-x+2}{x}$

*(Sol: **a)** $\nearrow$ (-1,0)U(1,∞) $\searrow$ (-∞,-1)U(0,1); **b)** $\nearrow$ (-∞,0)U(2,∞) $\searrow$ (0,2); **c)** $\nearrow$ (-∞,1)U(3,∞) $\searrow$ (1,3); **d)** $\nearrow$ (1,∞) $\searrow$ (-∞,-1); **e)** $\nearrow$ $\forall x\in\Re$; **f)** $\searrow$ (-∞,0) $\nearrow$ (0,∞); **g)** $\nearrow$ (-∞,-1)U(3,∞) $\searrow$ (-1,3); **h)** $\searrow$ (-∞,3) $\nearrow$ (3,∞); **i)** $\nearrow$ (-∞,-Ln3) $\searrow$ (-Ln3, ∞); **j)** $\nearrow$ (-∞,-4)U(0,∞) $\searrow$ (-4,-2)U(-2,0); **k)** $\nearrow$ (-∞,0) $\searrow$ (0,∞); **l)** $\nearrow$ (-∞,0) $\searrow$ (0,∞); **m)** $\searrow$ $\forall x\in Dom(f)$ **n)** $\searrow$ (-∞,-1) $\nearrow$ (-1,∞); **o)** $\searrow$ $\forall x\in Dom(f)$)*

**2.** ***(S)*** Definir extremo relativo. Razonar por qué la gráfica de la función y=2x+cos x no puede presentar extremos relativos.

**3.** ***(S) (**)*** Dada $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, considérese la función g(x)=f(x)+cx. Determinar los valores de **c** para los que es creciente para todo x. *(Soluc: $c>3\sqrt{3}/8$)*

**4.** ***(S)*** Determinar el máximo y el mínimo de $f(x)=x^5+x+1$ en el intervalo [0,2]

*(Soluc: m absoluto en (0,1) y M absoluto en (2,35))*

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

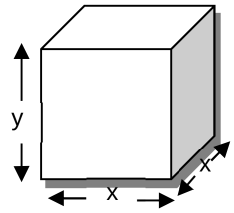
**5.** Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible. *(Soluc: 10 y 10)*

**6.** Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 m.

*(Soluc: un cuadrado de lado 10 m.)*

**7.** De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 m, determinar el que tiene área máxima.
*(Soluc: el que tiene ambos catetos de $5\sqrt{2}/2$ m)*

**8.**



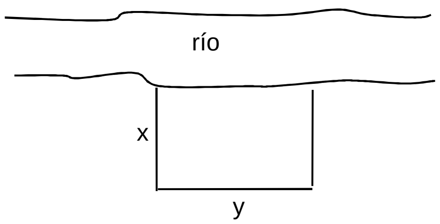

¿Qué dimensiones debe tener un depósito <u>abierto</u> de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros para que en su fabricación se utilice la menor superficie de chapa posible? (Recordar: $1 m^3 = 1000$ litros) *(Soluc: x = 2 m, y = 1 m)*

**9.** *(**S**)* Se desea diseñar una lata de conservas cilíndrica de 160 $cm^3$. Hallar las dimensiones de la más económica, esto es, la que emplee menos chapa en su construcción. *(Soluc: r ≅ 2,94 cm., h ≅ 5,88 cm)*

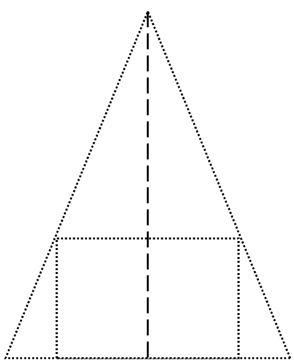
**10.** Se desea construir un marco para una ventana que debe tener 1 $m^2$ de luz. El coste del marco se estima en 4 € por cada metro de altura y 2,25 € por cada metro de anchura ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico? *(Soluc: 4/3 m de ancho y 3/4 m de alto)*

**11.** De todos los rectángulos de área 9 $cm^2$ halla las dimensiones del que tiene perímetro mínimo.
*(Soluc: un cuadrado de 3 cm de lado)*

**12.** Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180 000 $m^2$ ¿Qué dimensiones habrá de tener el terreno de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado? *(Soluc: x = 300 m, y = 600 m)*




**13.** ***(S)*** Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 metros de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible? *(Soluc: r = 5 m)*



**14.** De entre todos los triángulos isósceles de perímetro 36, hallar el que tiene área máxima. *(Soluc: un triángulo equilátero de lado 12)*

**15.** ***(S) (*)*** En un triángulo isósceles de base 12 cm y altura 18 cm se quiere inscribir un rectángulo de área máxima, como muestra la figura. Hallar las dimensiones de este rectángulo. (Ayuda: Plantear semejanza de triángulos).
*(Soluc: Se trata de un rectángulo de base 6 cm y altura 9 cm)*

## INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN:

**16.** Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los posibles P.I. de las siguientes funciones (aplicar para ello, alternativamente, los dos métodos conocidos: mediante f'' y mediante f''':

**a)** $f(x)=x^2+1$
**b)** $y=x^3$
**c)** $f(x)=x^2-4x+1$
**d)** $f(x)=x-x^2$
**e)** $y=x^3-2x^2-x+2$
**f)** $f(x)=x^4-6x^2$
**g)** $y=x^4+2x^3+6x^2+10x+5$
**h)** $y=x^3+3x^2+3x+1$
**i)** $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-5x+1$
**j)** $f(x)=\ln x$
**k)** $f(x)=x^4$
**l)** $y=\frac{x^5}{10}+\frac{x^4}{3}+x+1$

(*Sol:* ***a)*** *⊎ ∀IR;* ***b)*** *⊎ (0,∞) ⋂ (-∞,0);* ***c)*** *⊎ ∀IR;* ***d)*** *⋂ ∀IR;* ***e)*** *⊎ (2/3,∞) ⋂ (-∞,2/3);* ***f)*** *⊎ (-∞,-1)U(1,∞) ⋂ (-1,1);* ***g)*** *⊎ ∀IR;* ***h)*** *⊎ (-1,∞) ⋂ (-∞,-1);* ***i)*** *⊎(-∞,1)U(2,∞) ⋂ (1,2);* ***j)*** *⋂ en su dominio;* ***k)*** *⊎ ∀IR;* ***l)*** *⋂ (-∞,-2) ⊎ (-2,∞)*)

**17.** Definir punto de inflexión. Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^5-5x^3$, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Representarla.
(*Soluc: M(−1,2), m(1,−2), P.I.(0,0)*)

**18.** ***(S)*** Ídem para $y = xe^{-x}$ (*Soluc: M(1,1/e), ↗(-∞,1), ↘(1,∞), P.I.(2,2/e²), ⊎ (2,∞), ⋂ (-∞,2)*)

**19.** ***(S)*** Obtener la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión. Intentar dibujar la situación. *(Soluc: y=−6x+6)*

**20.** ***(S)*** Sea f(x) la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(siendo a y b ∈ IR). Hallar **a** y **b** para que f sea continua y derivable en el punto x=0. Para los anteriores valores de a y b, analizar si f(x) tiene inflexión en el punto x=0. *(Soluc: a=1, b=0; x=0 sí es P.I.)*

**21.** Obtener los parámetros **a** y **b** para que la función $y=x^2+ax+b$ alcance un mínimo en el punto P(−1,2).
*(Soluc: a=2, b=3)*

**22.** Hallar **a**, **b**, **c** y **d** en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que tenga un máximo en el punto M(0,4) y un mínimo en el punto M'(2,0). *(Soluc: a=1, b=−3, c=0, d=4)*

**23.** Hallar **a**, **b** y **c** en la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ para que tenga un punto de inflexión de abscisa x=3, pase por el punto P(1,0) y alcance un mínimo en x=1. *(Soluc: a=−9, b=6, c=2)*

**24.** ***(S)*** Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$. Hallar **a** y **b** de manera que la curva $y=f(x)$ tenga para x=1 una inflexión con tangente horizontal. *(Soluc: a=−3, b=3)*

**25.** Hallar **a**, **b**, **c** y **d** en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que pase por el punto P(−1,1) y tenga punto de inflexión con tangente horizontal en Q(0,−2). *(Soluc: a=−3, b=c=0, d=2)*

**26.** ¿Qué valores deben tomar **a**, **b**, **c** y **d** para que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto crítico en x=1 y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y=2x$ en el origen? *(Soluc: a=−2/3, b=d=0, c=2)*

## ASÍNTOTAS:

**27.** Hallar las asíntotas de las siguientes funciones (e intentar hacer un esbozo de la gráfica, si se puede):

**a)** $y = x^2 - x + 1$

**b)** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

**c)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

**d)** $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$

**e)** $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$

**f)** $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

**g)** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

**h)** $y=\dfrac{3x^3+4x^2+4}{x^2+1}$

**i)** $y=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

**j)** $y=\text{tg}x$

**k)** $y=\sqrt{x}$

**l)** $y=\sqrt{x^2-1}$

**m)** $y=\ln x$

**n)** $y=\ln(x+2)$

**α)** $y=\ln(x^2+1)$

**β)** $y=\ln(x^2-5x+6)$

**γ)** $y=\dfrac{1}{\ln x}$

**δ)** $y=e^x$

**ε)** $y=e^{-x}$

**ζ)** $y=e^{1/x}$

**η)** $y=xe^x$

**ϑ)** $y=\dfrac{x}{e^x}$

**ι)** $y=xe^{1/x}$

**κ)** $y=\dfrac{x}{e^x-1}$

*(Soluc: **a)** no tiene; **b)** x=−1, y=1; **c)** x=0, y=x; **d)** x=1, x−2y+1=0; **e)** y=0; **f)** x=−1, y=0; **g)** x=±1, y=1; **h)** y=3x+4; **i)** x=−1, y=x−2; **j)** y=π/2+kπ; **k)** no tiene; **l)** y=±x; **m)** x=0; **n)** x=−2; **o)** no tiene; **p)** x=2, x=3; **q)** x=1, y=0; **r)** y=0; **s)** y=0; **t)** x=0, y=1; **u)** y=0; **v)** y=0; **w)** x=0, y=x+1; **x)** y=0, y=−x)*

## REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES:

**28.** Dadas las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento y posibles M y m, intervalos de curvatura y posibles P.I, asíntotas y representación gráfica:

**a)** $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$

$$\left(\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,0)\cap(2,\infty) \\ f(x)\searrow \forall x\in(0,2)-\{1\} \end{array}\right\} & \Rightarrow M(0,0) \text{ y } m(2,8) \\ f(x)\cap\ \forall x\in(-\infty,1) & (\text{no tiene P.I.}) \\ f(x)\cup \forall x\in(1,\infty) & \end{array}\right)$$

**b)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

$$\left(\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} f(x)\searrow \forall x\in(-\infty,-1)\cap(1,\infty) \\ f(x)\nearrow \forall x\in(-1,1) \end{array}\right\} & \Rightarrow m(-1,-1/2) \text{ y } M(1,1/2) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cap\ \forall x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cap(0,\sqrt{3}) \\ f(x)\cup \forall x\in(-\sqrt{3},0)\cap(\sqrt{3},\infty) \end{array}\right\} & \Rightarrow \text{P.I.}(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/4) \text{ y } (\sqrt{3},\sqrt{3}/4) \end{array}\right)$$

**c)** $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

$$\left(\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} f(x)\searrow \forall x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cap(\sqrt{3},\infty) \\ f(x)\nearrow \forall x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}) \end{array}\right\} & \Rightarrow m(-\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}/2) \text{ y } M(\sqrt{3},\ -3\sqrt{3}/2) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cup \forall x\in(-\infty,-1)\cap(0,1) \\ f(x)\cap\ \forall x\in(-1,0)\cap(1,\infty) \end{array}\right\} & \Rightarrow \text{P.I.}(0,0) \end{array}\right)$$

**d)** $f(x)=\dfrac{4}{x^2+3}$

$$\left(\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,0) \\ f(x)\searrow \forall x\in(0,\infty) \end{array}\right\} & \Rightarrow M(0,4/3) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cup \forall x\in(-\infty,-1)\cap(1,\infty) \\ f(x)\cap\ \forall x\in(-1,1) \end{array}\right\} & \Rightarrow \text{P.I.}(-1,1) \text{ y } (1,1) \end{array}\right)$$

**e)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

$$\left(\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-1)\cap(1,\infty) \\ f(x)\searrow \forall x\in(-1,1)-\{0\} \end{array}\right\} & \Rightarrow M(-1,-2) \text{ y } m(1,2) \\ f(x)\cap\ \forall x\in(-\infty,0) & (\text{no tiene P.I.}) \\ f(x)\cup \forall x\in(0,\infty) & \end{array}\right)$$

**f)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$

$$\left(\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} f(x)\searrow \forall x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cap(\sqrt{2},\infty) \\ f(x)\nearrow \forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \end{array}\right\} & \Rightarrow M(\sqrt{2},\sqrt{2}/4) \text{ y } m(-\sqrt{2},-\sqrt{2}/4) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cap\ \forall x\in(-\infty,-\sqrt{6})\cap(0,\sqrt{6}) \\ f(x)\cup \forall x\in(-\sqrt{6},0)\cap(\sqrt{6},\infty) \end{array}\right\} & \Rightarrow \text{P.I.}(\sqrt{6},\sqrt{6}/8) \text{ y } (-\sqrt{6},-\sqrt{6}/8) \end{array}\right)$$

**g)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-1/2)-\{-2\} \\ f(x)\searrow \forall x\in(-1/2,\infty)-\{1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-1/2,-4/9) \\ f(x)\cup \forall x\in(-\infty,-2)\cap(1,\infty) \qquad \text{(no tiene P.I.)} \\ f(x)\cap \forall x\in(-2,1)\end{array}\right.$$

**h)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-2)\cap(0,\infty) \\ f(x)\searrow \forall x\in(-2,0)-\{-1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-2,-4)\ \text{ y } m(0,0) \\ f(x)\cap \forall x\in(-\infty,-1) \qquad \text{(no tiene P.I.)} \\ f(x)\cup \forall x\in(-1,\infty)\end{array}\right.$$

**i)** $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,0)\cap(2,\infty) \\ f(x)\searrow \forall x\in(0,2)-\{1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(0,-2)\ \text{ y } m(2,2) \\ f(x)\cap \forall x\in(-\infty,1) \qquad \text{(no tiene P.I.)} \\ f(x)\cup \forall x\in(1,\infty)\end{array}\right.$$

**j)** $f(x)=\dfrac{x^2+11}{x+5}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-11)\cap(1,\infty) \\ f(x)\searrow \forall x\in(-11,1)-\{-5\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(-11,-22)\ \text{ y } m(1,2) \\ f(x)\cap \forall x\in(-\infty,-5) \qquad \text{(no tiene P.I.)} \\ f(x)\cup \forall x\in(-5,\infty)\end{array}\right.$$

**k)** $y=(x^3-4x^2+7x-6)e^x$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(x)\searrow \forall x\in(-\infty,-1) \\ f(x)\nearrow \forall x\in(-1,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow m(-1,-18/e) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)\cap \forall x\in(-\infty,-3)U(0,1) \\ f(x)\cup \forall x\in(-3,0)U(1,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.: } (-3,-90/e^3),\ (0,-6),\ (1,-2e)\end{array}\right.$$

**l)** $y=x^3-3x+2$

**m)** $y=x-|x-3|+|x+1|$

**n)** $y=\dfrac{x^2+3x}{|x|+1}$

**o)** $f(x)=|x-5|x$

**p)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

**q)** $y=x^3+2x^2-10x-20$

**r)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**s)** $y=\dfrac{e^x}{x}$

**t)** $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

**u)** $f(x)=\ln(4-x^2)$

**v)** $y=\dfrac{\ln x}{x}$

**w)** $y=x-\ln x$

**29.** ***(S)*** Estudiar para qué valores de x está definida la función $f(x)=\ln[(x-1)(x-2)]$ y en qué valores es creciente y decreciente. *(Soluc: Dom(f)=$(-\infty,1)U(2,\infty)$, $\nearrow(2,\infty)$, $\searrow(-\infty,1)$)*