1. Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los próximos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en euros) viene dado por la siguiente expresión (x en años):

$F(x) = (x - 2)^2(1 - 2x) + 252x + 116$ con $0 \leq x \leq 10$

a. Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció.

b. El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

(Sol: Creció hasta el 8º año y decreció del 8º al 10º año. A los 8 años. Pierde 172 €)

2. Un jardinero quiere construir un parterre en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Determina el radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima:

a. Expresa el área del parterre, S, como función del radio, r.

b. Determina el valor del radio que maximiza S.

c. ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?

d. ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?

(Sol: $S(r)=10r-r^2$. 5 m. 2 radianes. el de la 2ª derivada (explicado))

3. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80x50 cm un cuadrado de lado x, y doblando convenientemente (véase la figura), se construye una caja. Calcula x para que el volumen de dicha caja sea máximo.

(Sol: x=10 cm)

4. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x), en miles de euros, viene dada en función de la cantidad que se invierta, x, en miles de euros, por medio de la siguiente expresión: $R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}5x + 2{,}5$

a. Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

b. ¿Qué rentabilidad obtendría?

(Sol: 250€, 65€)

5. Se desea construir un marco para una ventana rectangular de 6 m2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical 30 €. Calcula:

a. Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b. El coste del marco.

(Sol: 3m de base y 2m de altura. 240 €)

6. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende 2 helados menos al día. Si el coste de la unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero?

(Sol: 75 c)

7. Un cultivador de cítricos estima que si se plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol en cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:

a. Determina la función de producción total de naranjas.

b. ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas? ¿Cuál es la máxima producción? Razona la respuesta.

(Sol: P(x)=(60+x)(400-5x). 10 árboles adicionales. 24 500 naranjas)

8. Un granjero dispone de 3000 euros para cercar una porción de terreno rectangular adyacente a un río, usando a éste como un lado del área cercada; es decir, construirá tres cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro y para cada uno de los lados restantes es de 3 € por metro. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

(Sol: 300 m (lado paralelo al río) por 250 m)

9. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.
(Sol: 5 cm de alto por 10 cm de alto)

10. El precio de cada bloque de una cierta materia es proporcional al cuadrado de su peso. Tenemos un bloque de 20 kg que cuesta 5 €.
a. Si el bloque se rompe en dos trozos de 5 y 15 kg, ¿cuál es ahora el precio de los 2 trozos?
b. Demuestra que si el bloque se rompe en dos trozos cualesquiera, siempre se depreciará su valor.
c. Calcula para qué partición se produce la máxima pérdida de valor.
(Sol: a)0´3125€ ,b)x^2-20x< 0 ∀x∈]0,20[. c) Si se parte en dos trozos iguales (10 kg))

11. El índice de inflación de un país fue variando con el paso de los meses de un cierto año según la función: $I(t) = 3 + \frac{t^2 - 8t}{40}$ donde t = 1 corresponde a enero, t = 2 a febrero,..., t = 12 a diciembre.
a. ¿Durante qué meses el índice de inflación fue subiendo y durante cuáles bajó?
b. ¿Cuáles fueron los valores máximo y mínimo del índice de inflación de ese año y en qué meses se alcanzaron?
(Sol: Fue bajando hasta abril y de abril a diciembre subió. El mínimo se alcanzó en abril (2´6 puntos) y el máximo en diciembre (4´2 puntos))

12. Determina a y b para que la función $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos x_1 = 1 y x_2 = 2. Para estos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en 1 y en 2?
(Sol: a= −2/3 ; b= −1/6 . En x=1 hay un mínimo y en x=2 hay un máximo)

13. Sea la función: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$. Halla los valores de a y b de forma que $f(x)$ tenga un máximo en x=1 y un mínimo en x=2.
(Sol: a=12 y b=-9)

14. Halla los valores de a,b y c de forma que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen y tenga extremos en $x = -4$ y = 2. ¿De qué tipo de extremos se trata?
(Sol: c=0; a=3; b=-24. En x=-4 hay un máx. relativo y en x=2 un mín. rel.)

15. Para la función $f(x) = ax^2 + b\ln x$ calcula los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto (1,2).
(Sol: a=2 , b=4)

16. Cierta clase de bengala permanece encendida un tiempo de 4 minutos. Se ha comprobado que el porcentaje de luminosidad que produce viene dado, considerando el tiempo en minutos, a través de la función: $f(t) = 25t(4 - t)$; $0 \leq t \leq 4$
a. ¿Para qué valor de t se obtiene el porcentaje de luminosidad máximo?
b. ¿En qué intervalo de tiempo decrece el porcentaje de luminosidad?
c. ¿Para qué valores de t el porcentaje de luminosidad es del 75%?
(Sol: t=2. en]2,4[. Para t=1 y t=3)

17. Dada la función: $f(x) = \frac{bx}{x^2+1}$ con b un parámetro real distinto de 0. Se pide:
a. Determina las asíntotas de la función $f(x)$ para cualquier valor del parámetro b.
b. Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x)$ tenga un máximo en el punto (1,3).
(Sol: a)Asintota. hor.: y=0. b)b=6, (hay que comprobar que x=1 es máximo)